Desarrollo de trinomios con el triángulo de pascal modificado

Development of trinomia with the modified pascal triangle

José Luis Hidalgo Torres*

REVISTA TECNOLÓGICA
ciencia y educación
Edwards Deming

ISSN: 2600-5867

Editado por: Tecnológico Superior Corporativo Edwards Deming
Enero - Marzo Vol. 6 - 1 - 2022
https://revista-edwardsdeming.com/index.php/es
e-ISSN: 2576-0971
Recibido: 04 octubre 2021
Aprobado: 02 diciembre, 2021
Pag 117-138

RESUMEN

Con este artículo lo que se pretende principalmente es dar una propuesta de solución a desarrollos de trinomios elevados a potencias enteras positivas, para lo cual se empieza dando una interpretación a vagos indicios de la información recobrada en medios informáticos y que mediante los métodos de inducción y descripción en un proceso algebraico se van construyendo los elementos constitutivos de una estructura, a la que le he llamado el Triángulo de Pascal Modificado, técnica similar en el uso a cómo se utiliza el Triángulo de Pascal clásico. Y menciono algunas propiedades interesantes del Triángulo de Pascal, para recuperarles del olvido, propiedades que se utilizan en algunos campos de las matemáticas. Esta propuesta además de resolver trinomios elevados a potencias enteras positivas, que de por sí es importante para suavizar algunos casos en el cálculo; será la base para la generación de nuevas series algebraicas que servirán de modelos matemáticos.

Palabras clave: Propuesta, propiedades, indicios, inducción, proceso, series.

* Máster, Instituto Tecnológico Edwards Deming, Quito, Ecuador, jlhidalgot@hotmail.com, ORCID: 0000-0003-1285-0283

Articles

Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

ABSTRACT

With this article, what is mainly intended is to give a solution proposal to developments of trinomials elevated to positive integer powers, for which we begin by giving an interpretation to vague indications of the information recovered in computer media and that through the mechanisms of induction and deduction in an algebraic process, the constitutive elements of a structure are built, which I have called the Modified Pascal's Triangle, a technique similar in use to how the classic Pascal's Triangle is used. And I mention some interesting properties of Pascal's Triangle, to recover from oblivion, properties that are used in some fields of mathematics. This proposal in addition to solving trinomials raised to positive integer powers, which in itself is important to smooth some cases in the calculation; it will be the basis for the generation of new algebraic series that will serve as mathematical models.

Key words: Proposal, properties, indications, induction, process, series

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas están compuestas por expresiones, que en el transcurso de los tiempos se les ha llamado modelos matemáticos, unos muy simples y otros complejos. El Triángulo de Pascal es un modelo y una técnica matemática que sirve para resolver expresiones de la forma (a + b)n; a, b términos algebraicos, n ≥ 0, n entero.

En el presente artículo, salvando del olvido, inicialmente se da a conocer a la comunidad docente y estudiantil algunas de las múltiples propiedades, unas conocidas y otras desconocidas que tiene el Triángulo de Pascal y por la importancia de su aplicación en varios aspectos académicos y de uso en la vida cotidiana.

En una segunda parte y la más fundamental, se propone una técnica que sirve para resolver expresiones de la forma (a + b + c)n; a, b, c términos algebraicos, n ≥ 0, n entero; utilizando los procesos de inducción y descripción, se van desarrollando trinomios elevados a potencias enteras positivas, para ir estructurando los componentes o elementos algébricos generales, que son consecuencia de los resultados de la inducción aplicada.

Como es de conocimiento matemático académico, desde una simple igualdad, se la considera un modelo matemático; por lo tanto, su aplicación podría servir para generar patrones de regresión o modelos de comportamiento o tendencia, aplicados a distintos campos de las ciencias.

Articles

Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

MATERIALES Y MÉTODOS

Para la construcción del diseño y obtención de los elementos algébricos constitutivos de la estructura del Triángulo de Pascal Modificado, se ha utilizado los siguientes métodos de investigación:

El método inductivo como estrategia de razonamiento basado en la inducción, parte de premisas particulares u observaciones específicas para generar conclusiones generale. Es así que, a partir de casos específicos de desarrollos algebraicos de (a + b + c)n; a, b, c términos algebraicos, n ≥ 0, n entero; empezando con n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; se fueron determinando por inducción los coeficientes, términos algébricos y el orden de disposición o ubicación de cada uno de los componentes que serían los constituyentes en la estructura del Triángulo de Pascal Modificado. Recordemos que el Triángulo de Pascal, sólo permite desarrollar binomios elevados a potencias enteras positivas.

Método descriptivo según (Hernández_Sampieri, Fernández, & Baptista, 2014), el método consiste en describir o detallar fenómenos, situaciones, contextos y sucesos, en el cómo son y se manifiestan. Es decir, se pretende medir o recoger información de manera independiente o conjunta de los conceptos o las variables que intervienen y no cómo se relacionan.

Bajo esta concepción, el método descriptivo permitió describir de la manera matemática más sencilla posible el proceso de inducción del cómo se obtuvieron los términos y su disposición u orden en la estructura del Triángulo de Pascal Modificado.

RESULTADOS

Como primera parte de los propósitos de la investigación, se hace una pequeña mención de algunas conocidas y otras desconocidas propiedades del Triángulo de Pascal:

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

1. - Términos del Triángulo de Pascal:

Partimos de la estructura de los coeficientes del Triángulo de Pascal Figura **1**.

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

***Figura 1** Triángulo de Pascal*

n=	0	1							
n=	1	1	1						
n=	2	1	2	1					
n=	3	1	3	3	1				
n=	4	1	4	6	4	1			
n=	5	1	5	10	10	5	1		
n=	6	1	6	15	20	15	6	1	
n=	7	1	7	21	35	35	21	7	1

Fuente: (Quintana, 2018)

Sean: a, b ∊ Términos polinomiales Figura **2**, quedando entonces la estructura formular de cada componente del desarrollo de un binomio elevado a potencias enteras positivas:

***Figura 2** Disposición de los términos de un binomio en el Triángulo de Pascal*

$(a \pm b)^0 =$	1							
$(a \pm b)^1 =$	$1a$	$+1b$						
$(a \pm b)^2 =$	$1a^2$	$\pm 2ab$	$+1b^2$					
$(a \pm b)^3 =$	$1a^3$	$\pm 3(a^2)(b)$	$+3(a)(b^2)$	$\pm 1b^3$				
$(a \pm b)^4 =$	$1a^4$	$\pm 4(a^3)(b)$	$+6(a^2)(b^2)$	$\pm 4(a)(b^3)$	$+1b^4$			
$(a \pm b)^5 =$	$1a^5$	$\pm 5(a^4)(b)$	$+10(a^3)(b^2)$	$\pm 10(a^2)(b^3)$	$+5(a)(b^4)$	$\pm 1b^5$		
$(a \pm b)^6 =$	$1a^6$	$\pm 6(a^5)(b)$	$+15(a^4)(b^2)$	$\pm 20(a^3)(b^3)$	$+15(a^2)(b^4)$	$\pm 6(a)(b^5)$	$+1b^6$	
$(a \pm b)^7 =$	$1a^7$	$\pm 7(a^6)(b)$	$+21(a^5)(b^2)$	$\pm 35(a^4)(b^3)$	$+35(a^3)(b^4)$	$\pm 21(a^2)(b^5)$	$+7(a)(b^6)$	$\pm 1b^7$

2. - Relación que tienen valores de los coeficientes componentes del triángulo de Pascal con los coeficientes binomiales Figura **3**:

ISSN: 2600-5867

Figura 3 Los coeficientes del Triángulo de Pascal expresados como coeficientes binomiales.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

Fuente: (Bravo, 2021)

Cada valor de los coeficientes componentes del desarrollo del Triángulo de Pascal tiene su equivalente a manera de coeficiente binomial, así, por ejemplo:

$$2 = \binom{2}{1} \qquad 15 = \binom{6}{2}$$

Aplicando la fórmula de los coeficientes binomiales, permite obtener resultados como el de 2 y 15, y así sucesivamente para cada coeficiente de un desarrollo de un binomio elevado a potencias enteras positivas.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Y mediante el uso de la fórmula del Binomio de Newton, se puede desarrollar cualquier binomio elevado a una potencia entera positiva:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

3. - La suma de los elementos de cada fila del triángulo de Pascal, tiene un patrón de secuencia con las potencias de 2 Figura *4*:

Figura 4 *La suma de los elementos de cada fila expresadas en potencias de 2.*

n= 0								1								1	=	2^0
n= 1							1		1							2	=	2^1
n= 2						1		2		1						4	=	2^2
n= 3					1		3		3		1					8	=	2^3
n= 4				1		4		6		4		1				16	=	2^4
n= 5			1		5		10		10		5		1			32	=	2^5
n= 6		1		6		15		20		15		6		1		64	=	2^6
n= 7	1		7		21		35		35		21		7		1	128	=	2^7

Suma de los elementos de cada fila, se la puede obtener con: 2^n

Fuente: (Loco_Math, s.f.)

4. - Todo número de una línea horizontal compuesta por los coeficientes de algún binomio elevado a una potencia entera positiva; es igual a la suma de los números de la fila oblicua anterior al número, incluido el número sobre sí mismo, perteneciente a la misma diagonal Figura ***5***.

Por ejemplo: 6 = 1 + 2 + 3 ; 21 = 1 + 5 + 15.

ISSN: 2600-5867

Figura 5 Propiedad de Hockey

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Fuente: (Quintana, 2018)

5. - Se pueden encontrar los números naturales entre sus filas diagonales Figura **6**:

Figura 6 Los números naturales en el Triángulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Fuente: (Loco_Math, s.f.)

6. - La serie de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …. Figura **7**

Figura 7 La serie de Fibonacci

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Fuente: (Bravo, 2021)

Y así se podría presentar una gran cantidad de tipos de conjuntos de números que se obtienen por la divisibilidad entre los coeficientes del Triángulo de Pascal.

PROCEDIMIENTOS PARA LA TRANSFORMACIÓN DEL TRIÁNGULO DE PASCAL CLÁSICO, EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL MODIFICADO QUE SE UTILIZARÁ EN EL DESARROLLO DE TRINOMIOS ELEVADOS A POTENCIAS ENTERAS POSITIVAS.

Partiendo de la suposición de que la sociedad estudiantil, docentes de matemáticas y otros grupos académicos conocen el procedimiento de construcción del Triángulo de Pascal y su aplicación para obtener los coeficientes de los términos que son utilizados en los desarrollos para elevar binomios a cualquier potencia entera positiva, empezamos a diseñar el Triángulo de Pascal Modificado.

1.- A partir del Triángulo de Pascal (Figura **8**) clásico y las indicaciones de (Leguizamón, s.f.), construiremos las bases para obtener las estructuras de los coeficientes y los términos componentes del desarrollo de trinomios elevados a potencias enteras positivas:

Figura 8 El Triángulo de Pascal

n= 0							1						
n= 1						1		1					
n= 2					1		2		1				
n= 3				1		3		3		1			
n= 4			1		4		6		4		1		
n= 5		1		5		10		10		5		1	
n= 6			6		15		20		15		6		
n= 7	1	7		21		35		35		21		7	1

Fuente: (Quintana, 2018)

2.- Giramos el Triángulo de Pascal (Figura **8**) en sentido antihorario y recorriendo hacia la izquierda los coeficientes, hasta que queden las diagonales de los coeficientes como se muestra en la Figura **9** en un sentido vertical. Antes de realizar lo indicado,

anteponemos una columna de cantidades uno (1) como se muestra en la misma figura.

Figura 9 Triángulo de Pascal dispuesto en sentido vertical

n= 0	1								
n= 1	1	1	1						
n= 2	1	1	2	1					
n= 3	1	1	3	3	1				
n= 4	1	1	4	6	4	1			
n= 5	1	1	5	10	10	5	1		
n= 6	1	1	6	15	20	15	6	1	
n= 7	1	1	7	21	35	35	21	7	1

3.- A partir de disposición rectangular Figura **9**, movemos o recorremos los valores cada fila como se muestra a continuación, formando paquetes o grupos (Figura 10).

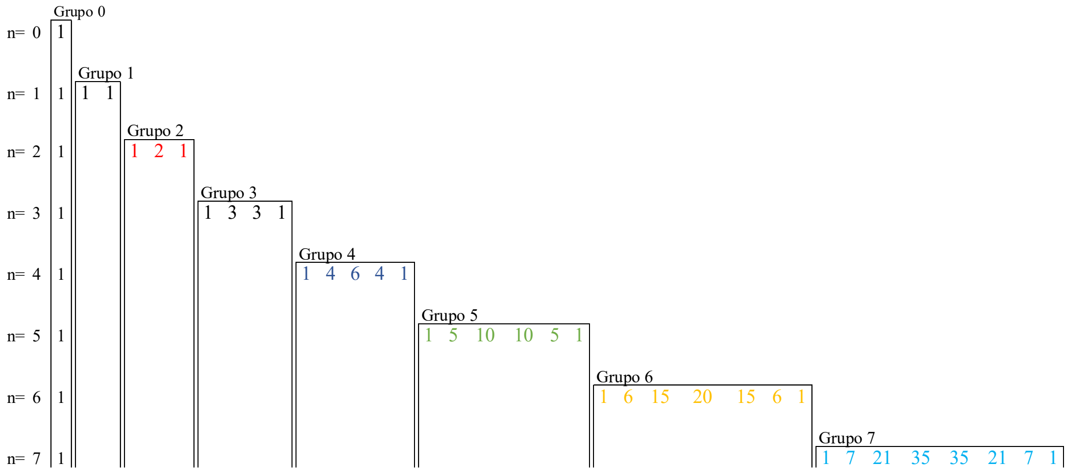
4.- Por cada fila de valor n, se debe tener una disposición grupal de manera escalonada como se muestra en la Figura 10 y que se hará casi en todos los casos referencia a esta figura, en la que cada grupo tendrá la misma cantidad de elementos correspondientes a los coeficientes del Triángulo de Pascal clásico según sea el valor de n, Tabla ***1***.

Tabla 1 *Grupos y sus coeficientes contenidos.*

Valor de n:	Grupo N°.:	Coeficientes
0	0	1
1	1	1 1
2	2	1 2 1
3	3	1 3 3 1

Y así sucesivamente. Hay que señalar que cada grupo n, va saltando los espacios correspondientes a cada uno de los grupos formados según los n anteriores; de manera escalonada.

Figura 10 Disposición del Triángulo de Pascal Modificado, formando grupos



Fuente: (Leguizamón, s.f.)

El siguiente paso es ir completando con los coeficientes faltantes (Tabla **2**) de los términos de los desarrollos de los trinomios elevados a potencias enteras positivas; en los saltos o espacios en cada fila, dejados por la ubicación escalonada de los grupos mencionados, en la Figura 10.

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

Tabla 2 *Coeficientes faltantes en los grupos, de acuerdo a la n - fila*

n	**Grupo 0**	**Grupo 1**	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
	Coeficientes				
0	1				
1	1	1 1			
2	1	COEFICIENTES?	**1 2 1**		
3	1	COEFICIENTES ?	COEFICIENTES ?	1 3 3 1	
4	1	COEFICIENTES ?	COEFICIENTES ?	COEFICIENTES ?	**1 4 6 4 1**

Procedimiento para la determinación de los coeficientes faltantes de cada uno de los grupos, según el valor de fila n en el Triángulo de Pascal Modificado.

Para poder realizar la inducción con el objetivo de obtener los valores de los coeficientes de los términos de los desarrollos de trinomios elevados a potencias enteras positivas, se aplicó el Triángulo de Pascal clásico en varios ejemplos, a tres variables representadas por a, b, c; a las que se les agrupó como ((a + b) +c) y se les elevó a las potencias enteras positivas.

Luego aplicando el Triángulo de Pascal a los binomios elevados a las correspondientes potencias de los desarrollos y finalmente se realizó operaciones aritméticas, algebraicas para totalizarlos y reordenando los términos correspondientes, según se interpreta en (Leguizamón, s.f.), Tabla 3 .

Se muestra también en las Tabla 10, Tabla 11 y Tabla 12 el Triángulo de Pascal Modificado, los coeficientes y las variables elevadas a las potencias enteras respectivas n.

Como se puede observar, las variables de los términos se van desarrollando de manera similar como cuando se aplica el Triángulo de Pascal en su manera usual, en un binomio elevado a cualquier potencia entera positiva.

Tabla 3 *Triángulo de Pascal Modificado: Coeficientes de los desarrollos de los trinomios elevados a potencias enteras positivas, según el valor de n, en cada fila.*

	GRUPOS:							
	0	1	2	3	4	5	6	7
n= 0	1							
n= 1	1	1 1						
n= 2	1	2 2	1 2 1					
n= 3	1	3 3	3 6 3	1 3 3 1				
n= 4	1	4 4	6 12 6	4 12 12 4	1 4 6 4 1			
n= 5	1	5 5	10 20 10	10 30 30 10	5 20 30 20 5	1 5 10 10 5 1		
n= 6	1	6 6	15 30 15	6 18 18 6	30 120 180 120 30	6 30 60 60 30 6	1 6 15 20 15 6 1	
n= 7	1	7 7	21 42 21	14 42 42 14	7 28 42 28 7	42 210 420 420 210 42	7 42 105 140 105 42 7	1 7 21 35 35 21 7 1
n= 8	1	8 8	28 56 28	8 24 24 8	40 160 240 160 40	8 40 80 80 40 8	56 336 840 1120 840 336 56	8 56 168 280 280 168 56 8

Entonces en cada fila, para todo n ≥ 0:

Para n ≥ 0: Todas las filas de la columna del grupo 0, estará formado por un único coeficiente, la cantidad 1.

Para cada caso de fila n ≥ 1: Todas las filas de la columna del grupo 1 (Tabla 4), estará formado por dos coeficientes iguales en cantidad según sea el valor de n.

Tabla 4 *Coeficientes del grupo 1 según el valor de n.*

n =	**Grupo 1:**
1	1 1
2	2 2
3	3 3

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

A los coeficientes de los grupos escalonados a partir del grupo 2 (Tabla 3), de acuerdo a como se muestra en la Figura 10, los vamos a considerar como coeficientes pívot o fijos de cada grupo, con los cuales de acuerdo a cada valor de n se realizarán operaciones aritméticas, para ir obteniendo los coeficientes faltantes de cada fila según el valor de n, en el grupo respectivo.
Para la determinación de los coeficientes de los grupos 2 y 3 se aplican procedimientos diferentes y para los grupos de 4 en adelante se va a indicar otro procedimiento estándar:

7.2.1.- Procedimientos para los grupos 2 y 3:

El procedimiento a aplicar será para el cálculo de los coeficientes a partir de la fila siguiente o de la fila debajo de los coeficientes pívot.

7.2.1.1.- Procedimiento para el cálculo de los coeficientes del grupo 2:

Entonces para el cálculo de los coeficientes del grupo 2 (Tabla ***5***), consideramos el caso de la fila n = 3. Multiplicamos el número 3 de la fila n = 3, por cada uno de los coeficientes pívot del grupo 2 de la fila n = 2: 1 2 1, obteniendo: 1*3 2*3 1*3 = 3 6 3 y los coeficientes de los n sucesivos, se los obtiene multiplicando el resultado de la siguiente relación por cada elemento de la fila pívot del grupo respectivo, en este caso del grupo 2.

Para los coeficientes de la fila n = 4; multiplicamos el (n-1) del caso anterior (es decir: n – 1 = 3) por el n a continuación (es decir: n = 4) y al resultado de ese producto lo dividimos para 2.

Tabla 5 *Procedimiento para la obtención de los coeficientes del grupo 2, para n≥3.*

n - 1	**n**	**(n-1) *n / 2**	**Observación**	**Coeficie n-tes de la fila n, del grupo 2**
3	4	3*4/2 = 6	Este valor de 6 multiplicamos por cada	6 12 6

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

			elemento de la fila pívot del grupo 2.	
4	5	4*5/2 = 10	Este valor de 10 multiplicamos por cada elemento de la fila pívot del grupo 2.	10 20 10
5	6	5*6/2 = 15	Este valor de 15 multiplicamos por cada elemento de la fila pívot del grupo 2.	15 30 15

Procedimiento para el cálculo de los coeficientes del grupo 3:

Para este procedimiento hay que considerar cuando n es par o impar, según esto se debe aplicar:

1.- Para una fila n par Tabla **6**:

Tomamos el valor de n par y multiplicamos el valor de n para cada coeficiente pívot de la fila n = 3.

Tabla 6 *Cálculo de los coeficientes de grupo 3, cuando n es par.*

n par	**Coeficientes pívot fila n = 3: 1 3 3 1**
4	4 12 12 4
6	6 18 18 6
8	8 24 24 8

Y así sucesivamente, para todo n par.

2.- Para una fila n impar *Tabla* **7** **Tabla *6***:
Tomamos el valor de n impar y multiplicamos el valor de n impar por 2; luego este resultado multiplicamos para cada coeficiente pívot de la fila n = 3.

Tabla 7 *Cálculo de los coeficientes de grupo 3, cuando n es impar.*

n impar	**n * 2**	**Coeficientes pívot fila n = 3: 1 3 3 1**
5	10	10 30 30 10
7	14	14 42 42 14
9	18	18 54 54 18

Procedimientos para los grupos ≥ 4:

Para cualquiera de las filas a continuación o debajo de las filas pívot Tabla 3, se aplican los siguientes procedimientos:

a.- En cada grupo; para todo valor de fila (n + 1) inmediatamente posterior o siguiente de la fila que contiene a los coeficientes pívot Tabla ***8***, se toma este valor de (n + 1) y se multiplica por cada coeficiente pívot del grupo correspondiente, para obtener los coeficientes de cada uno de los grupos de manera escalonada.

Este mismo procedimiento, después de realizado lo indicado en el caso anterior se aplica saltando un valor de fila n.

Tabla 8 *Para todo valor de fila (n + 1) inmediatamente posterior o siguiente de la fila que contiene a los coeficientes pívot*

n	**Grupo N°.**	**Coeficientes pívot fila n = 4: 1 4 6 4 1**
5	4	5 20 30 20 5

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

7	4	7 28 42 28 7
9	4	9 36 54 36 9

n	**Grupo N°.**	**Coeficientes pívot fila n = 5: 1 5 10 10 5 1**
6	5	6 30 60 60 30 6
8	5	8 40 80 80 40 8
10	5	10 50 100 100 50 10

b.- Y para el cálculo de los coeficientes de las filas n intermedias de los grupos Tabla **9**, que salen de las indicaciones anteriores; se obtienen de la siguiente manera:

Se multiplica el valor de la n fila por el (número de grupo + 1) y este resultado por cada coeficiente pívot del grupo correspondiente; así por ejemplo para calcular los coeficientes de n = 6 del grupo 4, se lo realiza de la siguiente manera:

Tabla 9 *Cálculo de los coeficientes de las filas n intermedias de los grupos.*

n	**Grupo N°.**	**n*(Grupo N°. + 1)**	**Coeficientes pívot del grupo 4: 1 4 6 4 1**
6	4	6*(4+1) = 30	30 120 180 120 30
8	4	8*(4+1) = 40	40 160 240 160 40

n	**Grupo N°.**	**n*(Grupo N°. + 1)**	**Coeficientes pívot del grupo 5: 1 5 10 10 5 1**
7	5	7*(5+1) = 42	42 210 420 420 210 42
9	5	9*(5+1) = 54	54 270 540 540 270 54

Articles

Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

Procedimiento para la determinación de los factores definidos por las variables en el desarrollo $(a + b + c)^n$ y que deben ir adjuntos a cada uno de los coeficientes del Triángulo de Pascal Modificado (Tabla 10, Tabla 11, y Tabla 12); correspondientes a los desarrollos de cada fila con n≥0 para cada grupo; siendo n el valor que define el exponente el cual irá elevado el trinomio.

Tabla 10 *Triángulo de Pascal Modificado: Coeficientes y variables con sus respectivas potencias enteras.*

	GRUPOS:																																			
	0	1		2			3				4					5						6							7							
n= 0	1																																			
	a	b	c																																	
n= 1	1	1	1																																	
	a^2	ab	ac	b^2	bc	c^2																														
n= 2	1	2	2	1	2	1																														
	a^3	a^2b	a^2c	ab^2	abc	b^2c	b^3	b^2c	bc^2	c^3																										
n= 3	1	3	3	3	6	3	1	3	3	1																										
	a^4	a^3b	a^3c	a^2b^2	a^2bc	a^2c^2	ab^3	ab^2c	abc^2	ac^3	b^4	b^3c	b^2c^2	bc^3	c^4																					
n= 4	1	4	4	6	12	6	4	12	12	4	1	4	6	4	1																					
	a^5	a^4b	a^4c	a^3b^2	a^3bc	a^3c^2	a^2b^3	a^2b^2c	a^2bc^2	a^2c^3	ab^4	ab^3c	ab^2c^2	abc^3	ac^4	b^5	b^4c	b^3c^2	b^2c^3	bc^4	c^5															
n= 5	1	5	5	10	20	10	10	30	30	10	5	20	30	20	5	1	5	10	10	5	1															
	a^6	a^5b	a^5c	a^4b^2	a^4bc	a^4c^2	a^3b^3	a^3b^2c	a^3bc^2	a^3c^3	a^2b^4	a^2b^3c	$a^2b^2c^2$	a^2bc^3	a^2c^4	ab^5	ab^4c	ab^3c^2	ab^2c^3	abc^4	ac^5	b^6	b^5c	b^4c^2	b^3c^3	b^2c^4	bc^5	c^6								
n= 6	1	6	6	15	30	15	6	18	18	6	30	120	180	120	30	6	30	60	60	30	6	1	6	15	20	15	6	1								
	a^7	a^6b	a^6c	a^5b^2	a^5bc	a^5c^2	a^4b^3	a^4b^2c	a^4bc^2	a^4c^3	a^3b^4	a^3b^3c	$a^3b^2c^2$	a^3bc^3	a^3c^4	a^2b^5	a^2b^4c	$a^2b^3c^2$	$a^2b^2c^3$	a^2bc^4	a^2c^5	ab^6	ab^5c	ab^4c^2	ab^3c^3	ab^2c^4	abc^5	ac^6	b^7	b^6c	b^5c^2	b^4c^3	b^3c^4	b^2c^5	bc^6	c^7
n= 7	1	7	7	21	42	21	14	42	42	14	7	28	42	28	7	42	210	420	420	210	42	7	42	105	140	105	42	7	1	7	21	35	35	21	7	1
n= 8	2	8	8	28	56	28	8	24	24	8	40	160	240	160	40	8	40	80	80	40	8	56	336	840	1120	840	336	56	8	56	168	280	280	168	56	8
n= ?	a^n	$a^{n-1}b$	$a^{n-1}c$	$a^{n-2}b^2$	$a^{n-2}bc$	$a^{n-2}c^2$	$a^{n-3}b^3$	$a^{n-3}b^2c$	$a^{n-3}bc^2$	$a^{n-3}c^3$	$a^{n-4}b^4$	$a^{n-4}b^3c$	$a^{n-4}b^2c^2$	$a^{n-4}bc^3$	$a^{n-4}c^4$	$a^{n-5}b^5$	$a^{n-5}b^4c$	$a^{n-5}b^3c^2$	$a^{n-5}b^2c^3$	$a^{n-5}bc^4$	$a^{n-5}c^5$	$a^{n-6}b^6$	$a^{n-6}b^5c$	$a^{n-6}b^4c^2$	$a^{n-6}b^3c^3$	$a^{n-6}b^2c^4$	$a^{n-6}bc^5$	$a^{n-6}c^6$ ...	b^n	$b^{n-1}c$	$b^{n-2}c^2$	$b^{n-3}c^3$	$b^{n-4}c^4$	$b^{n-5}c^5$	$b^{n-6}c^6$	.....$b^{n-n}c^{n-1}$ c^n

Articles

Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming

ISSN: 2600-5867

Tabla 11 *Vista 1 del Triángulo de Pascal Modificado.*

	0	1		2			3				4				
n= 0	1														
	a	b	c												
n= 1	1	1	1												
	a^2	ab	ac	b^2	bc	c^2									
n= 2	1	2	2	1	2	1									
	a^3	a^2b	a^2c	ab^2	abc	b^2c	b^3	b^2c	bc^2	c^3					
n= 3	1	3	3	3	6	3	1	3	3	1					
	a^4	a^3b	a^3c	a^2b^2	a^2bc	a^2c^2	ab^3	ab^2c	abc^2	ac^3	b^4	b^3c	b^2c^2	bc^3	c^4
n= 4	1	4	4	6	12	6	4	12	12	4	1	4	6	4	1
	a^5	a^4b	a^4c	a^3b^2	a^3bc	a^3c^2	a^2b^3	a^2b^2c	a^2bc^2	a^2c^3	ab^4	ab^3c	ab^2c^2	abc^3	ac^4
n= 5	1	5	5	10	20	10	10	30	30	10	5	20	30	20	5
	a^6	a^5b	a^5c	a^4b^2	a^4bc	a^4c^2	a^3b^3	a^3b^2c	a^3bc^2	a^3c^3	a^2b^4	a^2b^3c	$a^2b^2c^2$	a^2bc^3	a^2c^4
n= 6	1	6	6	15	30	15	6	18	18	6	30	120	180	120	30
	a^7	a^6b	a^6c	a^5b^2	a^5bc	a^5c^2	a^4b^3	a^4b^2c	a^4bc^2	a^4c^3	a^3b^4	a^3b^3c	$a^3b^2c^2$	a^3bc^3	a^3c^4
n= 7	1	7	7	21	42	21	14	42	42	14	7	28	42	28	7
n= 8	2	8	8	28	56	28	8	24	24	8	40	160	240	160	40
n = ?	a^n	$a^{n-1}b$	$a^{n-1}c$	$a^{n-2}b^2$	$a^{n-2}bc$	$a^{n-2}c^2$	$a^{n-3}b^3$	$a^{n-3}b^2c$	$a^{n-3}bc^2$	$a^{n-3}c^3$	$a^{n-4}b^4$	$a^{n-4}b^3c$	$a^{n-4}b^2c^2$	$a^{n-4}bc^3$	$a^{n-4}c^4$

Tabla 12 *Vista 2 del Triángulo de Pascal Modificado.*

GRUPOS:																					
5						6								7							
b^5	b^4c	b^3c^2	b^2c^3	bc^4	c^5																
1	5	10	10	5	1																
ab^5	ab^4c	ab^3c^2	ab^2c^3	abc^4	ac^5	b^6	b^5c	b^4c^2	b^3c^3	b^2c^4	bc^5	c^6									
6	30	60	60	30	6	1	6	15	20	15	6	1									
a^2b^5	a^2b^4c	$a^2b^3c^2$	$a^2b^2c^3$	a^2bc^4	a^2c^5	ab^6	ab^5c	ab^4c^2	ab^3c^3	ab^2c^4	abc^5	ac^6		b^7	b^6c	b^5c^2	b^4c^3	b^3c^4	b^2c^5	bc^6	c^7
42	210	420	420	210	42	7	42	105	140	105	42	7		1	7	21	35	35	21	7	1
8	40	80	80	40	8	56	336	840	1120	840	336	56		8	56	168	280	280	168	56	8
$a^{n-5}b^5$	$a^{n-5}b^4c$	$a^{n-5}b^3c^2$	$a^{n-5}b^2c^3$	$a^{n-5}bc^4$	$a^{n-5}c^5$	$a^{n-6}b^6$	$a^{n-6}b^5c$	$a^{n-6}b^4c^2$	$a^{n-6}b^3c^3$	$a^{n-6}b^2c^4$	$a^{n-6}bc^5$	$a^{n-6}c^6$	…	b^n	$b^{n-1}c$	$b^{n-2}c^2$	$b^{n-3}c^3$	$b^{n-4}c^4$	$b^{n-5}c^5$	$b^{n-6}c^6$ …..$b^{n-n}c^{n-1}$	c^n

Cada fila de cada grupo; tendrán las siguientes estructuras formulares para cada variable que debe conformar un término del desarrollo del trinomio $(a + b + c)^n$ con $n \geq 0$; para la generación de las variables parte de los términos de los grupos y en especial el último grupo que dependerá estrictamente de los dos últimos términos del trinomio:

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

Para la generación de los grupos, dependiendo de n ≥0:

Grupo 0:	a^n				
Grupo 1:	$a^{n-1}b$	$a^{n-1}c$			
Grupo 2:	$a^{n-2}b^2$	$a^{n-2}bc$	$a^{n-2}c^2$		
Grupo 3:	$a^{n-3}b^3$	$a^{n-3}b^2c$	$a^{n-3}bc^2$	$a^{n-3}c^3$	
Grupo 4:	$a^{n-4}b^4$	$a^{n-4}b^3c$	$a^{n-4}b^2c^2$	$a^{n-4}bc^3$	$a^{n-4}c^4$
.					
.					
.					
Para la generación del grupo n:					
Grupo n:	b^n	$b^{n-1}c$	$b^{n-2}c^2$ …	$b^{n-n}c^{n-1}$	c^n

Como se indica, se generarán n grupos dependiendo del valor de n; como una primera parte se tendrán grupos hasta (n-1) cuyos términos enésimos componentes de estos grupos serán una combinación de los tres términos del trinomio, hasta que el primer término del trinomio se convierta en uno, porque el exponente de este término del trinomio deberá llegar hasta ser n – n, haciendo que el término elevado a la cero sea 1 por definición.
Y en una segunda parte o última, aparecerá un grupo n, en el cual sólo tendrá entre sus términos de su desarrollo una combinación de los dos últimos términos del trinomio, según la disposición original de los términos del trinomio.

Procedimiento práctico de aplicación:

Para cualquier n entero positivo, siempre se debe empezar desde el Grupo 0, entonces los desarrollos de los trinomios elevados a cualquier potencia se empezarán de la siguiente manera (Tabla 10):

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

Sea la fila n=1: $\quad$ **$(a + b + c)^1$**
G 0 $\quad$ G 1
$1*a$ $\quad$ $1*b$ $\;$ $1*c$
$(a + b + c)^1 = 1*a + 1*b + 1*c = a + b + c$

Sea la fila n=2: $\quad$ **$(a + b + c)^2$**
G 0 $\quad$ G 1 $\quad$ G 2
$1*a^2$ $\quad$ $2*ab$ $\;$ $2*ac$ $\quad$ $1*b^2$ $\;$ $2*bc$ $\;$ $1*c^2$
$(a + b + c)^2 = 1*a^2 + 2*ab + 2*ac + 1*b^2 + 2*bc + 1*c^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

Sea la fila n=3: $\quad$ **$(a + b + c)^3$**
G 0 $\quad$ G 1 $\quad$ G 2 $\quad$ G 3
$1*a^3$ $\quad$ $3*a^2b$ $\;$ $3*a^2c$ $\;$ $3*ab^2$ $\;$ $6*abc$ $\;$ $3*b^2c$ $\;$ $1*b^3$ $\;$ $3*b^2c$ $\;$ $3*bc^2$ $\;$ $1*c^3$
$(a + b + c)^2 = 1*a^3 + 3*a^2b + 3*a^2c + 3*ab^2 + 6*abc + 3*b^2c + 1*b^3 + 3*b^2c + 3*bc^2 + 1*c^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3b^2c + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

Nota: Los signos aritméticos de cada término del desarrollo de los trinomios elevados a cualquier potencia entera, dependerán de los signos correspondientes de cada término del trinomio y de sus exponentes si son enteros pares o impares.

Articles
Revista tecnológica ciencia y educación Edwards Deming
ISSN: 2600-5867

Como aplicación o uso de la técnica del Triángulo de Pascal Modificado, se pueden utilizar los resultados obtenidos, y que se encuentran representados en la Tabla 13 siguiente:

Tabla 13. *Resumen de resultados de trinomios elevados a potencias enteras positivas.*

$(a + b + c)^0 =$	1
$(a + b + c)^1 =$	$1*a+1*b+1*c$
$(a + b + c)^2 =$	$1*a^2+2*ab+2*ac+1*b^2+2*bc+1*c^2$
$(a + b + c)^3 =$	$1*a^3+3*a^2b+3*a^2c+3*ab^2+6*abc+3*b^2c+1*b^3+3*b^2c+3*bc^2+1*c^3$
$(a + b + c)^4 =$	$1*a^4+4*a^3b+4*a^3c+6*a^2b^2+12*a^2bc+6*a^2c^2+4*ab^3+12*ab^2c+12*abc^2+4*ac^3+1*b^4+4*b^3c+6*b^2c^2+4*bc^3+1*c^4$
$(a + b + c)^5 =$	$1*a^5+5*a^4b+5*a^4c+10*a^3b^2+20*a^3bc+10*a^3c^2+10*a^2b^3+30*a^2b^2c+30*a^2bc^2+10*a^2c^3+5*ab^4+20*ab^3c+30*ab^2c^2+20*abc^3+5*ac^4+1*b^5+5*b^4c+10*b^3c^2+10*b^2c^3+5*bc^4+1*c^5$
$(a + b + c)^6 =$	$1*a^6+6*a^5b+6*a^5c+15*a^4b^2+30*a^4bc+15*a^4c^2+6*a^3b^3+18*a^3b^2c+18*a^3bc^2+6*a^3c^3+30*a^2b^4+120*a^2b^3c+180*a^2b^2c^2+120*a^2bc^3+30*a^2c^4+6*ab^5+30*ab^4c+60*ab^3c^2+60*ab^2c^3+30*abc^4+6*ac^5+1*b^6+6*b^5c+15*b^4c^2+20*b^3c^3+15*b^2c^4$
$(a + b + c)^7 =$	$1*a^7+7*a^6b+7*a^6c+21*a^5b^2+42*a^5bc+21*a^5c^2+14*a^4b^3+42*a^4b^2c+42*a^4bc^2+14*a^4c^3+7*a^3b^4+28*a^3b^3c+42*a^3b^2c^2+28*a^3bc^3+7*a^3c^4+42*a^2b^5+210*a^2b^4c+420*a^2b^3c^2+420*a^2b^2c^3+210*a^2bc^4+42*a^2c^5+7*ab^6+42*ab^5c+105*ab^4c^2+140*ab^3c^3+105*ab^2c^4+42*abc^5+7*ac^6+1*b^7+7*b^6c+21*b^5c^2+35*b^4c^3+35*b^3c^4+21*b^2c^5+7*bc^6+1*c^7$

DISCUSIÓN

Su importancia parte desde el desarrollo básico de factorización de expresiones matemáticas que nos enseñaron en los niveles medios de educación secundaria; uno de los mecanismos para factorizar era Triángulo de Pascal que permite resolver binomios elevados a cualquier potencia entera positiva. En el transcurrir del tiempo, técnicas como el Triángulo de Pascal y con sus propiedades, logran dar un avance en la programación, la optimización de procesos industriales y económicos, al constituirse en modelos matemáticos que sirven para simular y estudiar las causas y efectos que se producen en casi todos los campos del saber humano.

Por ejemplo, la disposición de los números o coeficientes, se forman ciertos tipos de figuras llamados fractales, estas disposiciones se encuentran en la naturaleza en sus distintas formas; es decir estructuras matemáticas que reflejan y explican el comportamiento natural de nuestro entorno.

Para el caso de la propuesta para resolver trinomios elevados a potencias enteras positivas mediante el uso del Triángulo de Pascal Modificado, considero que podría tener similar importancia y aplicación en los distintos campos del saber matemático; el mecanismo de inducción y deducción de los coeficientes componentes de su estructura tienen patrones similares a las propiedades del Triángulo de Pascal, así también lo indican y demuestran en sus propuestas (Leguizamón, s.f.) y (Gómez_Sánchez, Gómez_Sánchez, & Recio_Reyes, 2011).

REFERENCIAS

Acta. (s.f.). *Pascal Y La Teoría De Números*. En F. García, *044043.Pdf* (Págs. 43 - 54). Autores Científico-Técnicos Y Académicos. Obtenido De Https://Www.Acta.Es/Medios/Articulos/Matematicas/044043.Pdf

Bravo, D. (20 De Marzo De 2021). *Youtube*. Obtenido *De Triángulo De Pascal. 12 Secretos Que Te Dejarán Con La Boca Abierta*: Https://Www.Youtube.Com/Watch?V=Fh0b-3mkfsg

Gómez_Sánchez, D., Gómez_Sánchez, A., & Recio_Reyes, R. (2011). *Modelo para resolver un trinomio elevado a la n. Revista Iberoamericana De Educación Matemática Union*, 21 - 29.

Hernández_Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, M. D. (2014). *Metodología De La Investigación.* México D.F.: Mcgraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. De C.V.

Leguizamón, J. (S.F. De S.F. De S.F.). *Curiosidades Matematicas El Triangulo De Pascal Generalizado.* (G. D. Pirámide, Ed.) Recuperado El 7 De Julio De 2021, De El Triangulo De Pascal Generalizado: Http://Www.Alammi.Info/2congreso/Memorias/Documentos/Martes/Triangulo.Pdf

Loco_Math. (s.f.). *Youtube*. Obtenido De Triangulo De Pascal - Curiosidades: Https://Www.Youtube.Com/Watch?V=Tusbdlufpo0

Quintana, M. (11 De Nov. De 2018). *Centro De Estudios Matemáticos Mauro Quintana Ltda.* Obtenido De El Triángulo De Pascal: Una de las llaves de la Matemática: https://www.youtube.com/watch?v=KX0vfHwfxu0